Über diejenigen Kugeln, welche die Kanten eines beliebigen Tetraeders berühren.

Von **Dr. J. H. T. Müller**,
Schulrath zu Wiesbaden.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Juli 1854.)

Die Construction der Berührungskreise an die Ecken, sowie an die Seiten eines geradlinigen Dreiecks war schon den Alten bekannt und bildete in der verloren gegangenen, später jedoch vielfach restituirten Schrift des Apollonius Pergäus: *περὶ ἐπαφῶν*, zwei Einzelfälle einer allgemeineren Aufgabe, nämlich diejenigen Kreise zu construiren, welche von in einer Ebene gegebenen Punkten, Geraden und Kreisen je drei Stück berühren. Ebenso gehört nach Einführung der Algebra in die Geometrie die Berechnung der Halbmesser jener Kreise der frühesten Zeit an, während die Aufsuchung von Wechselbeziehungen dieser Halbmesser erst in die neuere Zeit fällt und hier eine grosse Zahl interessanter Resultate zu Tage gefördert hat.

Weit später haben die Mathematiker ihre Aufmerksamkeit auf das analoge stereometrische Problem gewendet:

an die gleichartigen Stücke eines ebenflächigen körperlichen Vierecks oder Tetraeders die Berührungskugeln zu construiren.

Zwei Drittheile der hierher gehörenden Aufgaben finden sich in einer Abhandlung von Petr. Fermat: *De contactibus sphaericis* (*Ej. varia opera mathematica.* Tolosae 1679, S. 74—88), ebenfalls als Einzelfälle der Construction solcher Kugeln behandelt, welche von Punkten, Ebenen und Kugeln je vier Stück berühren. Der Verfasser lehrt demnach dort diejenigen Kugeln darstellen, welche

1. die vier Ecken, 2. die vier Flächen eines beliebigen Tetraeders berühren, ohne sich bei der grossen Kürze seines Vortrags auf die Bestimmung ihrer Anzahl einzulassen. Noch jüngeren Datums ist die Berechnung der Halbmesser dieser Berührungskugeln, womit sich Lagrange, Carnot und Legendre beschäftigt haben, indem Lagrange deren Werthe durch Coordinaten, Carnot durch die sechs Tetraederkanten und Legendre durch die Kanten und Winkel einer Tetraederecke ausdrückte, was durchgängig auf ziemlich weitläufige Formeln führte. Für den Halbmesser der dem Tetraeder umschriebenen Kugel hat später Crelle einen sehr geschmeidigen und besonders desshalb bemerkenswerthen Ausdruck gegeben, weil dessen Gestalt mit der für den Inhalt des Dreiecks durch die drei Seiten übereinstimmt. Derselbe wird weiter unten bei der Zusammenstellung aller Formeln seinen Platz finden. Was die Berührungskugeln an die Tetraederflächen betrifft, so wird deren mögliche Anzahl selbst von Lagrange nicht vollständig angegeben, denn er erwähnt ausser der alle Flächen von innen berührenden nur noch die vier, welche je eine Fläche von aussen streifen, während es deren noch drei geben kann, welche je zwei Flächen von aussen treffen. Alle acht Berührungskugeln an die Flächen sind vielleicht zum ersten Male in meinen „Betrachtungen über das Tetraeder mit seinen Berührungskugeln, Wiesbaden 1852, 4°“ etwas näher untersucht worden. Bezeichnet man den Halbmesser der dem Tetraeder $= \mathfrak{T}$ umschriebenen Kugel mit r, die Halbmesser aber der die Tetraederflächen A, B, C, D berührenden Kugeln mit ρ, so dass diesem Buchstaben die von aussen berührten Flächen zum Zeiger gegeben werden, so erhält man, wenn a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2 Gegenkanten sind, und wenn

$$+a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = T_0$$
$$-a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = T_a$$
$$+a_1 a_2 - b_1 b_2 + c_1 c_2 = T_b$$
$$+a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = T_c$$

gesetzt wird, folgende Ausdrücke:

$$r = \frac{\sqrt{T_0 . T_a . T_b . T_c}}{24\,\mathfrak{T}}$$

$$\rho_0 = \frac{3\,\mathfrak{T}}{+A+B+C+D},$$

$$\rho_A = \frac{3\mathfrak{T}}{-A+B+C+D}, \quad \rho_B = \frac{3\mathfrak{T}}{+A-B+C+D},$$

$$\rho_C = \frac{3\mathfrak{T}}{+A+B-C+D}, \quad \rho_D = \frac{3\mathfrak{T}}{+A+B+C-D},$$

$$\rho_{AD} = \frac{3\mathfrak{T}}{-A+B+C-D}, \quad \rho_{BD} = \frac{3\mathfrak{T}}{+A-B+C-D},$$

$$\rho_{CD} = \frac{3\mathfrak{T}}{+A+B-C-D},$$

wo in den drei letzten Gleichungen

$$A+D < B+C \qquad B+D < A+C \qquad C+D < A+B$$

angenommen ist.

Hiermit ist jedoch die Untersuchung der Berührungskugeln an die gleichartigen Stücke eines Tetraeders nicht erschöpft, indem bis jetzt blos dessen Ecken und Flächen betrachtet worden sind, während man die hiermit völlig gleichberechtigten Kanten ganz unbeachtet gelasseu hat. Diese Vernachlässigung hängt genau damit zusammen, dass schon Fermat, so wie alle späteren Mathematiker, die sich mit der oben erwähnten allgemeinen Aufgabe beschäftigt, unter den von einer Kugel zu berührenden Stücken die geraden Linien übergangen, und damit jenes Problem willkürlich und zwar bedeutend beschränkt haben. Der Grund hievon liegt dort nahe genug. Man braucht nur den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche zwei einander kreuzende Gerade berühren, mit den Örtern der Berührungskugeln an zwei Punkte oder zwei Ebenen zu vergleichen, um sich von der bei weitem grösseren Schwierigkeit namentlich einer rein constructiven Auflösung dahin einschlagender Aufgaben zu überzeugen.

Der Zweck gegenwärtiger Abhandlung ist nun, obige Lücke auszufüllen und sowohl durch Construction als durch Rechnung

diejenigen Kugeln zu finden, welche die Kanten eines gegebenen beliebigen Tetraeders berühren.

Da aber, wie von Punkten, Ebenen und Kugeln, so auch von Geraden schon vier Stücke die zugehörigen Berührungskugeln bestimmen, während das Tetraeder sechs Kanten hat, so erhält unsere Aufgabe jetzt folgende bestimmtere Gestalt:

Alle Kugeln zu finden, welche je vier Kanten eines gegebenen beliebigen Tetraeders berühren.

Die Aufzählung aller dieser Kantenvierungen führt uns auf zwei verschiedene Classen von Aufgaben. Es können nämlich

entweder drei der vier zu berührenden Kanten $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{durch eine Ecke}}{\text{in einer Ebene}}$ $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gehen}}{\text{liegen}}$, also $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Ecken-}}{\text{Flächen-}}$kanten sein, während die vierte je eine der noch übrigen Kanten ist,

oder alle vier zu berührenden Kanten zwei Paar Gegenkanten sein, also ein einfaches gebrochenes Viereck bilden.

Durch die Untersuchung der Aufgaben der zweiten Classe werden wir dann von selbst auf die specielle Frage kommen:

Welche Beschaffenheit ein Tetraeder haben müsse, wenn eine Kugel, welche vier seiner Kanten berührt, auch zugleich die beiden noch übrigen, also sämmtliche Kanten berühren soll.

Da das Tetraeder vier $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{Ecken}}{\text{Flächen}}$ hat, so enthält die erste Classe $4 \cdot 3 = 12$ Aufgaben. Auf die zweite Classe aber kommen deren 3, weil unser Körper drei Paar Gegenkanten hat.

Werden in dem Tetraeder $\mathfrak{abcd}$ für jetzt die Kanten

$$\mathfrak{da},\ \mathfrak{db},\ \mathfrak{dc};\ \mathfrak{bc},\ \mathfrak{ca},\ \mathfrak{ab}$$

mit

$$a_1,\ b_1,\ c_1;\ a_2,\ b_2,\ c_2$$

bezeichnet, so erhält man demnach folgende Verbindungen von je vieren derselben:

$$\begin{array}{llll}
a_1\, b_1\, c_1\, a_2; & a_2\, b_2\, c_1\, a_1; & a_2\, b_1\, c_2\, a_1; & a_1\, b_2\, c_2\, a_2; \\
a_1\, b_1\, c_1\, b_2; & a_2\, b_2\, c_1\, b_1; & a_2\, b_1\, c_2\, b_2; & a_1\, b_2\, c_2\, b_1; \\
a_1\, b_1\, c_1\, c_2; & a_2\, b_2\, c_1\, c_2; & a_2\, b_1\, c_2\, c_1; & a_1\, b_2\, c_2\, c_1;
\end{array}$$

$$b_1\, b_2\, c_1\, c_2;$$
$$c_1\, c_2\, a_1\, a_2;$$
$$a_1\, a_2\, b_1\, b_2.$$

Erste Aufgaben-Classe.

Da offenbar alle Aufgaben dieser Classe auf einerlei Weise aufgelöst werden, so wird es zunächst hinreichen, eine derselben zu betrachten. Hierzu möge die Kantengruppe $a_1\ b_1\ c_1\ a_2$ gewählt sein, worin a_2, b_1, c_1 die Fläche A und a_1, b_1, c_1 die dieser Fläche anliegende Ecke $\mathfrak{d}$ bilden.

Seien zuerst die hierzu gehörenden Berührungskugeln durch Construction gesucht. Da eine Kugel der Lage und Grösse nach durch vier Punkte ihrer Oberfläche, welche nicht in einerlei Ebene liegen, bestimmt ist, so bedarf es blos der Kenntniss derjenigen vier Punkte, worin dieselbe die vier hier in Betracht kommenden Tetraederkanten berührt.

Wir wollen für jede solche Kugel diese Berührungspunkte nach den Kanten

$$a_2,\ b_1,\ c_1,\ a_1,$$

worin sie liegen, mit

$$\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{a}_1$$

bezeichnen.

Aus der Lehre von den Berührungskreisen an das Dreieck ergibt sich nun alsbald, dass, wenn eine Kugel alle drei Seiten a_2, b_1, c_1 des Dreiecks A von innen berührt,

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{d}\mathfrak{c}_1 = \tfrac{1}{2}(-a_2+b_1+c_1);\\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 &= \mathfrak{c}\mathfrak{a}_2 = \tfrac{1}{2}(+a_2-b_1+c_1);\\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \tfrac{1}{2}(+a_2+b_1-c_1);\end{aligned}$$

und wenn eine Kugel von aussen berührt:

die Seite a_2,

dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{d}\mathfrak{c}_1 = \tfrac{1}{2}(+a_2+b_1+c_1);\\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 &= \mathfrak{c}\mathfrak{a}_2 = \tfrac{1}{2}(+a_2-b_1+c_1);\\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \tfrac{1}{2}(+a_2+b_1-c_1);\end{aligned}$$

die Seite b_1,

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{d}\mathfrak{c}_1 = \tfrac{1}{2}(+a_2+b_1-c_1);\\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 &= \mathfrak{c}\mathfrak{a}_2 = \tfrac{1}{2}(+a_2+b_1+c_1);\\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \tfrac{1}{2}(-a_2+b_1+c_1);\end{aligned}$$

die Seite c_1,

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{d}\mathfrak{c}_1 = \tfrac{1}{2}(+a_2-b_1+c_1);\\ \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 &= \mathfrak{c}\mathfrak{a}_2 = \tfrac{1}{2}(-a_2+b_1+c_1);\\ \mathfrak{b}\mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \tfrac{1}{2}(+a_2+b_1+c_1)\end{aligned}$$

ist.

Es sind demnach von allen vier möglichen Arten von Berührungskugeln an die drei Seiten des Dreiecks A die drei Berührungspunkte durch a_2, b_1, c_1 bestimmt.

Was jetzt die noch übrige ausserhalb der Fläche A liegende Kante $a_1 = \mathfrak{d}\mathfrak{a}$ betrifft, so ist die Strecke $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$, als dritte aus der Ecke $\mathfrak{d}$ an die Kugel gezogene Berührungslinie in jeder der vier Verbindungen $= \mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}\mathfrak{c}_1$. Da aber $\mathfrak{d}\mathfrak{a}_1$ von $\mathfrak{d}$ aus sowohl in der Richtung $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$, als auch in der ihr entgegengesetzten, d. i. in der Rückverlängerung von $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ abgetragen werden kann, so erhält man zu jeden drei zusammen gehörigen Punkten $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ zwei verschiedene vierte Punkte $\mathfrak{a}_1'$ und $\mathfrak{a}_1''$.

Hieraus folgt,

dass es zu vier Tetraederkanten, von denen drei durch eine Ecke gehen / in einer Ebene liegen, acht verschiedene Berührungskugeln gibt.

Da nun nach dem Früheren das Tetraeder 12 solcher Kantenvierungen enthält, so ergibt sich hieraus,

dass es im Tetraeder $12 \cdot 8$, d. i. sechsundneunzig verschiedene Kugeln gibt, welche je vier Kanten desselben berühren, von denen drei durch eine Ecke gehen / in einer Ebene liegen.

Wollte man sich mit der blossen Construction begnügen, so wäre hiermit eigentlich die erste Classe unserer Aufgaben gelöst, weil mit der Kugelfläche zugleich deren Mittelpunkt und Halbmesser gegeben ist. Hiermit wäre indess wenig erreicht, weil das Auffinden von Wechselbeziehungen der erhaltenen Kugeln sehr beschwerlich werden würde, und weil man ohnedies fordern kann, dass die verschiedenen Kugelhalbmesser unmittelbar durch die das Tetraeder bestimmenden Stücke ausgedrückt werden. Dies aber lässt sich nur auf dem Wege der Rechnung erlangen, zu welcher wir jetzt übergehen wollen.

Über die Wahl der Bestimmungsstücke des Tetraeders, deren bekanntlich sechs erforderlich sind, kann man hier nicht zweifelhaft sein, da die zu berührenden Stücke lauter Kanten sind und da diese ausserdem den ausschliesslichen Vorzug der Gleichartigkeit haben. Wir werden demnach die Kugelradien durch die sechs Tetraederkanten auszudrücken suchen.

Am nächsten läge für diesen Zweck der Gedanke, die neue Aufgabe auf eine frühere zurückzuführen. Da nämlich, wie in unserem obigen Beispiele für die Berührung der Kanten $a_1\ b_1\ c_1\ a_2$, die zugehörigen Berührungspunkte $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{a}_2$ bereits gefunden sind, so hätte man nur die obige Formel für

$$r = \frac{\sqrt{T_0\, T_a\, T_b\, T_c}}{24\,\mathfrak{T}'}$$

auf das neue Tetraeder $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{a}_2$ anzuwenden, und zu diesem Behufe die sechs Kanten $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ durch die Kanten des gegebenen Tetraeders $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$ auszudrücken. Dann wäre der Halbmesser der dem Tetraeder $\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1\ \mathfrak{a}_2$ umschriebenen Kugel zugleich der Halbmesser der gesuchten Berührungskugel an die Kanten $a_1\ b_1\ c_1\ a_2$. Man überzeugt sich jedoch sehr bald, dass dieses Verfahren auf höchst weitläufige Ausdrücke führen würde, indem zwar die fünf ersten Abstände $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1$ bis $\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1$ ziemlich einfach sind, z. B.

$$\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1{}^2 = \frac{-a_2+b_1+c_1}{+a_2+b_1+c_1}\cdot\frac{4A^2}{b_1\,c_1},$$

dagegen der sechste Abstand $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$, welcher zweien *Gegenkanten* des gegebenen Tetraeders angehört, sehr viele Glieder enthält.

Zweckmässiger werden wir bei der Auflösung unserer Aufgabe von den *geometrischen Örtern* der Mittelpunkte aller derjenigen Kugeln ausgehen, welche

1. drei Gerade, wie a_2, b_1, c_1, berühren, die einander zu je zweien in verschiedenen Punkten schneiden, also in *einer Ebene* liegen und ein Dreieck, wie A, begrenzen;
2. drei Gerade, wie a_1, b_1, c_1, berühren, die durch *einen Punkt*, wie $\mathfrak{d}$, gehen, aber nicht in einerlei Ebene liegen, also eine Ecke bilden.

Alsdann geben die Durchschnittspunkte je eines Paares dieser Örter die Mittelpunkte der gesuchten Berührungskugeln, aus deren Lage gegen das Tetraeder wir hierauf die betreffenden Radien durch Rechnung werden abzuleiten haben.

Da wir bereits wissen, dass von nicht weniger als 96 Kugeln die Halbmesser zu suchen sind, so werden wir vor allen Dingen auf eine einfache und sichere *Bezeichnung* alles Erforderlichen bedacht sein müssen, wenn die Ergebnisse unter einander vergleichbar werden und wir uns überhaupt in der ganzen Untersuchung leicht zurecht finden sollen. Wendet man die gewöhnliche, auch hier bis jetzt gebrauchte Bezeichnungsweise der Tetraederstücke an, wornach die Ecken mit

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$,

deren Gegenflächen mit A, B, C, D,

und die Kanten

$\mathfrak{d}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$; $\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$,

mit a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2

bezeichnet werden, so zeigt sich überall, wo bei Tetraederuntersuchungen Ecken oder Flächen mit Kanten oder Keilen in Verbindung treten, eine gewisse Ungleichförmigkeit in den Formeln, welche den wesentlichen Nachtheil hat, dass sich aus einer solchen Formel die damit verwandten nicht durch ein blosses Fortschieben aller Buchstaben hervorbringen lassen, wovon bekanntlich in der Coordinatengeometrie ein so ausgedehnter Gebrauch gemacht wird. Der Grund hiervon liegt darin, dass für die Kanten nur drei Symbole, nämlich $a, b, c,$ für die Ecken und Flächen aber deren vier angewendet werden. So sehr sich daher auch die Kantenbezeichnung mit blos drei Buchstaben durch ihre Kürze empfiehlt, und so brauchbar sie auch für symmetrische Ausdrücke bleibt, wo man es lediglich mit Kanten zu thun hat, so wenig eignet sie sich für asymmetrische Formeln, wie die unserigen sein müssen. Soll die erforderliche innere Übereinstimmung erreicht werden, so bleibt kein anderer Ausweg übrig, als die vier Zeichen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ durchgängig fest zu halten, und demnach die Kanten mit ihren zwei Endbuchstaben, also in ihrer ursprünglichen Weise mit

$$\mathfrak{da},\ \mathfrak{db},\ \mathfrak{dc};\ \mathfrak{bc},\ \mathfrak{ca},\ \mathfrak{ab}$$

zu bezeichnen. Dies schliesst natürlich nicht aus, dass man während der Berechnung eines einzelnen Falles, wie auch hier geschehen wird, die alten kürzeren Symbole anwendet; allein das Endresultat wird erst dann auch ohne Figur völlig verständlich und auf alle verwandten Fälle leicht und sicher durch blosses Fortschieben der Buchstaben übertragbar, wenn vorher darin a_1, b_1, .. durch $\mathfrak{da}$, $\mathfrak{db}$, .. ersetzt worden ist.

Örter der ersten Gattung. Man erhält den Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche die drei Seitenrichtungen eines Dreiecks $\mathfrak{abc}$ berühren, wenn man zu demselben die vier Kreise construirt, von denen der eine keine, jeder der drei übrigen aber je eine Seite des Dreiecks von aussen berührt, und hierauf durch deren Mittelpunkte vier unbegrenzte Gerade zieht, welche auf der Dreiecksebene senkrecht stehen.

Diese vier Mittelpunktsörter jeder Tetraederfläche wollen wir mit dem der letzteren entsprechenden griechischen Buchstaben bezeichnen, und jedem solcher vier Örter zum Zeiger diejenige Kante (Dreiecksseite) geben, welche von aussen berührt wird, woraus von selbst folgt, dass derjenige Ort, dessen Kugeln alle Seiten von innen, d. i. keine Seite von aussen berühren, zum Zeiger die Null erhalten muss.

Demnach sind von den vier Tetraederflächen

	A	B	C	D
die Mittelpunktsörter:	α_0	β_0	γ_0	δ_0
	$\alpha_{\mathfrak{bc}}$	$\beta_{\mathfrak{cd}}$	$\gamma_{\mathfrak{da}}$	$\delta_{\mathfrak{ab}}$
	$\alpha_{\mathfrak{cd}}$	$\beta_{\mathfrak{da}}$	$\gamma_{\mathfrak{ab}}$	$\delta_{\mathfrak{bc}}$
	$\alpha_{\mathfrak{db}}$	$\beta_{\mathfrak{ac}}$	$\gamma_{\mathfrak{bd}}$	$\delta_{\mathfrak{ca}}$.

Da schon oben bei der Construction der Berührungskugeln die Hälften der verschiedenen Seitenaggregate der Dreiecke in Anwendung kamen, und auch bei der Rechnung deren Gebrauch erforderlich sein wird, so wollen wir gleich hier für dieselben der Kürze halber geeignete Symbole einführen und zu diesem Zwecke, je nachdem sie zu den Tetraederflächen

$$A \quad B \quad C \quad D$$

gehören, jedes solche Aggregat mit

$$a \quad b \quad c \quad d$$

bezeichnen, so dass diesem Buchstaben dasjenige Glied zum Zeiger gegeben wird, welches in dem betreffenden Aggregate subtractiv ist. Dies gibt

für A			für B		
$\frac{1}{2}(+a_2+b_1+c_1)$	a_0	a_0	$\frac{1}{2}(+b_2+c_1+a_1)$	b_0	b_0
$\frac{1}{2}(-a_2+b_1+c_1)$	a_a	$a_{\mathfrak{bc}}$	$\frac{1}{2}(-b_2+c_1+a_1)$	b_b	$b_{\mathfrak{ac}}$
$\frac{1}{2}(+a_2-b_1+c_1)$	a_b	$a_{\mathfrak{bd}}$	$\frac{1}{2}(+b_2-c_1+a_1)$	b_c	$b_{\mathfrak{cd}}$
$\frac{1}{2}(+a_2+b_1-c_1)$	a_c	$a_{\mathfrak{cd}}$	$\frac{1}{2}(+b_2+c_1-a_1)$	b_a	$b_{\mathfrak{ad}}$

für C			für D		
$\frac{1}{2}(+c_2+a_1+b_1)$	c_0	c_0	$\frac{1}{2}(+a_2+b_2+c_2)$	d_0	d_0
$\frac{1}{2}(-c_2+a_1+b_1)$	c_c	$c_{\mathfrak{ab}}$	$\frac{1}{2}(-a_2+b_2+c_2)$	d_a	$d_{\mathfrak{bc}}$
$\frac{1}{2}(+c_2-a_1+b_1)$	c_a	$c_{\mathfrak{ad}}$	$\frac{1}{2}(+a_2-b_2+c_2)$	d_b	$d_{\mathfrak{ac}}$
$\frac{1}{2}(+c_2+a_1-b_1)$	c_b	$c_{\mathfrak{bd}}$	$\frac{1}{2}(+a_2+b_2-c_2)$	d_c	$d_{\mathfrak{ab}}$

wo zugleich die während einer Untersuchung bequemeren Zeichen wie $a_{\mathfrak{a}}$, . . mit aufgenommen sind.

Örter der zweiten Gattung. Wenn ganz allgemein drei unbegrenzte Gerade a, b, c durch einen und denselben Punkt $\mathfrak{o}$ gehen und nicht in einerlei Ebene liegen, so sind hierdurch vier Paar dreikantige Scheitelecken bestimmt. Zu jedem dieser Eckenpaare gibt es eine unbegrenzte Gerade, welche mit den drei Kanten einer jeden dieser zwei Ecken gleiche Winkel bildet und daher der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln ist, innerhalb dieser die beiden Scheitelecken liegen und deren Kanten berühren. Wir erhalten demnach zu unseren drei Geraden a, b, c vier einander in $\mathfrak{o}$ durchschneidende Mittelpunktsörter.

Denkt man sich nun um $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt irgend eine Kugelfläche beschrieben,

welche von den Geraden $a \quad ; \quad b \quad ; \quad c$

in den Gegenpunkten $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}''; \; \mathfrak{b}', \mathfrak{b}''; \; \mathfrak{c}', \mathfrak{c}''$

durchstochen wird, so sind hierdurch die vier Paare sphärischer Gegendreiecke

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', & \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'' \\ \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\mathfrak{c}', & \mathfrak{a}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}'' \\ \mathfrak{a}'\mathfrak{b}''\mathfrak{c}', & \mathfrak{a}''\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'' \\ \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'', & \mathfrak{a}''\mathfrak{b}''\mathfrak{c}' \end{array}$$

bestimmt. Durchstechen ferner die obigen Mittelpunktsörter diese Dreiecksflächen in den Punkten

$$\begin{array}{l} \mathfrak{p}_{\mathfrak{o}}\,,\; \mathfrak{q}_{\mathfrak{o}} \\ \mathfrak{p}_{\mathfrak{a}}\,,\; \mathfrak{q}_{\mathfrak{a}} \\ \mathfrak{p}_{\mathfrak{b}}\,,\; \mathfrak{q}_{\mathfrak{b}} \\ \mathfrak{p}_{\mathfrak{c}}\,,\; \mathfrak{q}_{\mathfrak{c}} \end{array}$$

so sind diese die Mittelpunkte der den zugehörigen Dreiecken umschriebenen Kugelkreise und die sphärischen Radien die Masse derjenigen Winkel, welche unsere Mittelpunktsörter mit den Geraden a, b, c bilden. Da die Kenntniss dieser Winkel uns zur Auflösung unserer eigentlichen Aufgabe führen wird, so haben wir die sphärischen Radien

$$r_{\mathfrak{o}},\; r_{\mathfrak{a}},\; r_{\mathfrak{b}},\; r_{\mathfrak{c}}$$

jener umschriebenen Dreiecke zu berechnen.

Sei $\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ diejenige Ecke, also $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ dasjenige sphärische Dreieck, worauf wir Alles zurückführen wollen und

also auch Bogen $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{b}'\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'} = \alpha, \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{c}'\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'} = \beta, \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{a}'\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'} = \gamma$

und der Keil
also auch der sphär. Winkel $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{o}\mathfrak{a}'}{\mathfrak{a}'} = a, \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{o}\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}'} = b, \quad \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{o}\mathfrak{c}'}{\mathfrak{c}'} = c.$

so ist bekanntlich $\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$. Diesen constanten Quotienten, welcher auch für alle unsere übrigen Dreiecke derselbe bleibt, wollen wir mit k bezeichnen.

Dann ist aus der Sphärik bekannt, dass

$$tang\, r_o = \frac{k}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma};$$

$$tang\, r_{\mathfrak{a}} = \frac{k}{2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma}; \qquad tang\, r_{\mathfrak{b}} = \frac{k}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\beta\sin\frac{1}{2}\gamma};$$

$$tang\, r_{\mathfrak{c}} = \frac{k}{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

wird. Wir können sonach aus den Winkeln der Strahlen $\mathfrak{o}\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{o}\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{o}\mathfrak{c}'$ die Winkel bestimmen, welche jeder der vier Mittelpunktsörter mit den drei Geraden a, b, c bildet.

Kehren wir nach diesen allgemeinen Feststellungen wieder zu unserem Tetraeder zurück. Hier haben wir vier solcher Durchschnittspunkte je dreier Geraden, nämlich

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{b},\ \mathfrak{c},\ \mathfrak{d},$$

um deren jeden bei gehöriger Kantenverlängerung vier Paar Scheitelecken liegen.

diejenige Ecke $\hat{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\hat{\mathfrak{b}}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}$, $\hat{\mathfrak{c}}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}$, $\hat{\mathfrak{d}}\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$,

welche dem Tetraeder selbst angehört, so wie deren Scheitelecke, werde mit

$$\mathfrak{a}_o,\ \mathfrak{b}_o,\ \mathfrak{c}_o,\ \mathfrak{d}_o$$

bezeichnet.

Denken wir uns jetzt z. B. für den Punkt $\mathfrak{a}$ die Tetraederkante $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ über $\mathfrak{a}$ hinaus rückwärts verlängert, $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}\mathfrak{d}$ aber über $\mathfrak{a}$ nicht rückwärts verlängert, so wollen wir die hierdurch bestimmte Ecke sammt deren Scheitelecke mit $\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}$ bezeichnen, und so für alles Übrige. Hierdurch erhalten wir kurze und leicht verständliche Symbole für alle dem Tetraeder anliegenden Paare von Scheitelecken, nämlich

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{c}},\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{d}},\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}$$
$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{d}}.\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{a}},\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}$$
$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}},\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}.\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{b}}.\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}.$$

Unsere nächste Aufgabe ist nun, die Tangente des Winkels, welchen je ein Mittelpunktsort mit den Kanten seiner Ecke bildet, durch die sechs Tetraederkanten auszudrücken.

Wählen wir hierzu den Scheitel $\mathfrak{d}$, welchem die Kanten a_1, b_1, c_1 anliegen, und bezeichnen wir z. B. die Tangente desjenigen Winkels, welchen die Kanten $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ (sowie deren drei Rückverlängerungen über $\mathfrak{d}$ hinaus) mit dem zugehörigen Mittelpunktsorte bilden, schlechthin mit $\mathfrak{d}_0$, also mit dem nämlichen Symbole, womit die Ecken selbst bezeichnet werden, was hier kein Missverständniss zulässt, weil wir es auch in der Folge nie mit einer andern Function dieses Winkels zu thun haben werden: so erhalten wir nach dem oben aufgestellten Satze

$$\mathfrak{d}_o = \frac{k_\mathfrak{d}}{2\cos\frac{1}{2}\widehat{b_1c_1}\cos\frac{1}{2}\widehat{a_1c_1}\cos\frac{1}{2}\widehat{a_1b_1}}.$$

Hierin ist

$$k_\mathfrak{d} = \frac{\sin\widehat{b_1c_1}}{\sin\widehat{a_1}}.$$

Da $A = \frac{1}{2}b_1c_1 \sin \widehat{b_1c_1}$, so wird $\sin \widehat{b_1c_1} = \dfrac{2A}{b_1\,c_1}$, und da, wie die Tetraedrometrie lehrt, der Inhalt jedes Tetraeders gefunden wird, wenn man das Product zweier Tetraederflächen mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Keils multiplicirt, hierein mit der Kante dieses Keils dividirt und den Quotienten mit $\dfrac{2}{3}$ multiplicirt, so dass

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{3}\cdot\frac{B\,C\sin a_1}{a_1}$$

wird, so erhält man hieraus

$$\sin a_1 = \frac{3}{2}\cdot\frac{a_1\,\mathfrak{T}}{B\,C}.$$

Die Einsetzung dieser Werthe in die Gleichung

$$k_\mathfrak{d} = \frac{\sin\widehat{b_1c_1}}{\sin\widehat{a_1}}$$

gibt uns

$$k_\mathfrak{d} = \frac{4}{3}\cdot\frac{A\;B\;C}{a_1\,b_1\,c_1}\cdot\frac{1}{\mathfrak{T}}.$$

Unsere Constante einer Tetraederecke ist demnach $\dfrac{4}{3}$ des reciproken Tetraederinhalts, wenn man diesen Werth mit dem

Producte der drei dieser Ecke anliegenden Flächen multiplicirt, und durch das Product der drei ihr anliegenden Kanten dividirt.

In dieser Formel haben wir noch, um auf die Kanten zurückzukommen,

$$A = \sqrt{a_0 \; a_{\mathfrak{bc}} \; a_{\mathfrak{bd}} \; a_{\mathfrak{cd}}}$$
$$B = \sqrt{b_0 \; b_{\mathfrak{ac}} \; b_{\mathfrak{ad}} \; b_{\mathfrak{cd}}}$$
$$C = \sqrt{c_0 \; c_{\mathfrak{ab}} \; c_{\mathfrak{ad}} \; c_{\mathfrak{bd}}}$$

einzusetzen.

Ferner erhalten wir aus den Dreiecken A, B, C nach einer bekannten Formel der ebenen Trigonometrie

$$\cos \tfrac{1}{2} \widehat{b_1 c_1} = \sqrt{\frac{(a_2 + b_1 + c_1)(-a_2 + b_1 + c_1)}{4 b_1 c_1}} = \sqrt{\frac{a_0 \, a_{\mathfrak{bc}}}{b_1 c_1}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \widehat{a_1 c_1} = \sqrt{\frac{(b_2 + a_1 + c_1)(-b_2 + a_1 + c_1)}{4 a_1 c_1}} = \sqrt{\frac{b_0 \, b_{\mathfrak{ac}}}{a_1 c_1}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \widehat{a_1 b_1} = \sqrt{\frac{(c_2 + a_1 + b_1)(-c_2 + a_1 + b_1)}{4 a_1 b_1}} = \sqrt{\frac{c_0 \, c_{\mathfrak{ab}}}{a_1 b_1}}.$$

Werden die bisher gefundenen Werthe in die frühere Gleichung

$$\mathfrak{d}_0 = \frac{k_{\mathfrak{d}}}{2 \cos \tfrac{1}{2} \widehat{b_1 c_1} \cos \tfrac{1}{2} \widehat{a_1 c_1} \cos \tfrac{1}{2} \widehat{a_1 b_1}}$$

eingesetzt, so erhalten wir:

$$\mathfrak{d}_0 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \cdot \frac{\sqrt{a_0 \, a_{\mathfrak{bc}} \, a_{\mathfrak{bd}} \, a_{\mathfrak{cd}} \, b_0 \, b_{\mathfrak{ac}} \, b_{\mathfrak{ad}} \, b_{\mathfrak{cd}} \, c_0 \, c_{\mathfrak{ab}} \, c_{\mathfrak{ad}} \, c_{\mathfrak{bd}}}}{a_1 b_1 c_1} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b_1 c_1}{a_0 a_{\mathfrak{bc}}} \cdot \frac{a_1 c_1}{b_0 b_{\mathfrak{ac}}} \cdot \frac{a_1 b_1}{c_0 c_{\mathfrak{ab}}}}$$

und nach einer leichten Reduction:

$$\mathfrak{d}_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \cdot \sqrt{a_{\mathfrak{db}} \, a_{\mathfrak{dc}} \, b_{\mathfrak{da}} \, b_{\mathfrak{dc}} \, c_{\mathfrak{da}} \, c_{\mathfrak{db}}}.$$

Diese überraschend einfache Formel, welche sogar logarithmisch ist, zeigt uns,

dass die unter dem Wurzelzeichen befindlichen halben Aggregate den drei die fragliche Ecke ($\mathfrak{d}_0$) einschliessenden Tetraederflächen (A, B, C) angehören, und dass in diesen Aggregaten einzeln diejenigen Kanten negativ zu nehmen sind ($\mathfrak{db}$, $\mathfrak{dc}$; $\mathfrak{da}$, $\mathfrak{dc}$; $\mathfrak{da}$, $\mathfrak{db}$), welche jener Ecke anliegen.

Wird jetzt weiter die frühere Gleichung

$$tang\, r_{\mathfrak{a}} = \frac{k}{2\cos\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}\beta \sin\frac{1}{2}\gamma}$$

auf die Ecke $\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}$ angewendet, so wird

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}} = \frac{k_{\mathfrak{d}}}{2\cos\frac{1}{2}\, b_1\hat{}c_1 \sin\frac{1}{2}\, a_1\hat{}c_1 \sin\frac{1}{2}\, a_1\hat{}b_1}.$$

Da nun in den Dreiecken A, B, C

$$\cos\tfrac{1}{2}\, b_1\hat{}c_1 = \sqrt{\frac{a_0\, a_{\mathfrak{bc}}}{b_1\, c_1}};\ \sin\tfrac{1}{2}\, a_1\hat{}c_1 = \sqrt{\frac{b_{\mathfrak{ab}}\, b_{\mathfrak{cb}}}{a_1\, c_1}};\ \sin\tfrac{1}{2}\, a_1\hat{}b_1 = \sqrt{\frac{c_{\mathfrak{ab}}\, c_{\mathfrak{bb}}}{a_1\, b_1}}$$

ist, während $k_{\mathfrak{d}}$ seinen früheren Werth behält, so finden wir eben so leicht

$$\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}} \cdot \sqrt{a_{\mathfrak{db}}\, a_{\mathfrak{bc}}\, b_0\, b_{\mathfrak{ac}}\, c_0\, c_{\mathfrak{ab}}}.$$

Demnach enthält für jede dem Tetraeder anliegende Ecke ($\mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}$) die Tangente des Winkels, welchen ihr Mittelpunktsort mit den zugehörigen Kanten bildet,

> im Radicanden wiederum aus jeder der ihr anliegenden Flächen (A, B, C) als Factoren je zwei halbe Seitenaggregate, und zwar von der Beschaffenheit, dass in dem Dreiecke (A), welches der rückwärts verlängerten Kante ($\mathfrak{d}\,\mathfrak{a}$) gegenüberliegt, je eine durch die fragliche Ecke gehende Kante ($\mathfrak{d}\,\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}\,\mathfrak{c}$) negativ wird, während aus den beiden übrigen Flächen (B, C), sowohl keine Seite als auch diejenige negativ wird, welche **nicht** durch die Ecke geht ($\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$).

Da es nicht blos für unsere specielle Frage, sondern überhaupt für die Tetraedrometrie von Interesse ist, aus diesen Tangentenformeln eine Reihe von Folgerungen abzuleiten, so wird eine Tafel aller dieser Tangenten am Orte sein, damit sich das Ganze leichter übersehen lasse.

In dieser Tafel ist durchgängig der beständige Factor $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}}$ hinzuzufügen, den wir der Kürze halber mit τ bezeichnen wollen.

Tangenten-Tafel.

	τ	oder τ
$\mathfrak{d}_0$	$\sqrt{a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\ a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\ c_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\ c_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{a_b\ a_c\ b_a\ b_c\ c_a\ c_b}$
$\mathfrak{c}_0$	$\sqrt{a_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}\ a_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ d_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}\ d_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{a_a\ a_c\ b_b\ b_c\ d_a\ d_b}$
$\mathfrak{b}_0$	$\sqrt{a_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\ a_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\ d_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}\ d_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}}$	$\sqrt{a_a\ a_b\ c_c\ c_b\ d_a\ d_c}$
$\mathfrak{a}_0$	$\sqrt{b_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\ b_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}$	$\sqrt{b_b\ b_a\ c_c\ c_a\ d_b\ d_c}$
$\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$	$\sqrt{a_0\ a_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}\ b_0\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}\ c_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\ c_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{a_o\ a_a\ b_o\ b_b\ c_a\ c_b}$
$\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$	$\sqrt{a_0\ a_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\ c_0\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}}$	$\sqrt{a_o\ a_a\ b_a\ b_c\ c_o\ c_c}$
$\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$	$\sqrt{a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\ a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\ b_0\ b_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\ c_0\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{a_b\ a_c\ b_o\ b_b\ c_o\ c_c}$
$\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$\sqrt{a_0\ a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\ b_0\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\ d_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}\ d_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{a_o\ a_b\ b_o\ b_a\ d_a\ d_b}$
$\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$	$\sqrt{a_0\ a_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ d_0\ d_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}}$	$\sqrt{a_o\ a_b\ b_b\ b_c\ d_o\ d_c}$
$\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$	$\sqrt{a_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}\ a_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ b_0\ b_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ d_0\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{a_a\ a_c\ b_o\ b_a\ d_o\ d_c}$
$\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$\sqrt{a_0\ a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\ c_0\ c_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\ d_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}\ d_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}}$	$\sqrt{a_o\ a_c\ c_o\ c_a\ d_a\ d_c}$
$\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$	$\sqrt{a_0\ a_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{a}}\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\ d_0\ d_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}}}$	$\sqrt{a_o\ a_c\ c_c\ c_b\ d_o\ d_b}$
$\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$	$\sqrt{a_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\ a_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\ c_0\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ d_0\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}$	$\sqrt{a_a\ a_b\ c_o\ c_a\ d_o\ d_b}$
$\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$\sqrt{b_0\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\ c_o\ c_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}}$	$\sqrt{b_o\ b_c\ c_o\ c_b\ d_b\ d_c}$
$\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$	$\sqrt{b_0\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ d_0\ d_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}}$	$\sqrt{b_o\ b_c\ c_c\ c_a\ d_o\ d_a}$
$\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$	$\sqrt{b_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\ b_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ c_0\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\ d_0\ d_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}}$	$\sqrt{b_b\ b_a\ c_o\ c_b\ d_o\ d_a}$

Hieraus lässt sich eine grosse Zahl von neuen und einfachen Beziehungen ableiten, die namentlich von allen Wurzelzeichen frei sind. Einige derselben verdienen hier um so mehr Aufnahme, als sie eine unmittelbare Anwendung auf die Halbmesser der Berührungskugeln gestatten, wesshalb sie dort nicht weiter entwickelt zu werden brauchen, und ausserdem dort das Auffinden von Sätzen erleichtern.

$$\frac{\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0}{\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{d}_0} = \frac{c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{a_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\ b_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}};$$

$$\frac{\mathfrak{d}_\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{d}_\mathfrak{b}}{\mathfrak{d}_0 \cdot \mathfrak{d}_\mathfrak{c}} = \frac{c_0\ c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\ c_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}} = \cot \tfrac{1}{2}\, a_1{}^{\wedge} b_1^2;$$

$$\frac{\mathfrak{c}_\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{d}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0} = \frac{a_0\ b_0}{c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0} = \frac{c_0\ d_0}{c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\ d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}};$$

$$\frac{\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}}=\frac{a_0\;b_0}{c_0\;d_0};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}}=\frac{b_{\mathfrak{ac}}\;b_{\mathfrak{ad}}}{a_{\mathfrak{bc}}\;a_{\mathfrak{bd}}}=\frac{a_1\;b_2\;\sin\frac{1}{2}a_1{}^\wedge b_2^2}{a_2\;b_1\;\sin\frac{1}{2}a_2{}^\wedge b_1^2};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}}=\frac{c_{\mathfrak{ad}}\;d_{\mathfrak{ac}}}{c_{\mathfrak{bd}}\;d_{\mathfrak{bc}}};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}}=\frac{d_0\;d_{\mathfrak{bc}}}{a_0\;a_{\mathfrak{bc}}}=\frac{b_2\;c_2\;\cos\frac{1}{2}b_2{}^\wedge c_2^2}{b_1\;c_1\;\cos\frac{1}{2}b_1{}^\wedge c_1^2};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}}=\frac{c_{\mathfrak{bd}}\;d_0}{a_{\mathfrak{bd}}\;b_0};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{c}_0}{\mathfrak{d}_0}=\tau^2.\;a_{\mathfrak{bc}}\,b_{\mathfrak{ac}}\,c_{\mathfrak{ab}}\,d_{\mathfrak{bc}}\,d_{\mathfrak{ac}}\,d_{\mathfrak{ab}};$$

$$\frac{\mathfrak{d}_\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}_0}=\tau^2.\;a_0\;b_0\;c_0\;a_{\mathfrak{bc}}\,b_{\mathfrak{ac}}\;c_{\mathfrak{ab}};$$

$$=\left\{\tau\;a_1\,b_1\,c_1\;\cos\tfrac{1}{2}a_1\hat{}b_1\;\cos\tfrac{1}{2}a_1\hat{}c_1\;\cos\tfrac{1}{2}b_1\hat{}c_1\right\}^2;$$

$$\frac{\mathfrak{d}_\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{c}_0}=\frac{a_0\;\;b_0\;\;c_0}{d_{\mathfrak{bc}}\;d_{\mathfrak{ac}}\;d_{\mathfrak{ab}}}=\frac{a_0\,b_0\,c_0\,d_0}{D^2};$$

$$\frac{\mathfrak{d}_\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}}{\mathfrak{a}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}}=\frac{a_{\mathfrak{bc}}\;b_{\mathfrak{ac}}\;c_{\mathfrak{ab}}}{d_{\mathfrak{bc}}\;d_{\mathfrak{ac}}\;d_{\mathfrak{ab}}}=\frac{a_{\mathfrak{bc}}\,b_{\mathfrak{ac}}\,c_{\mathfrak{ab}}\,d_0}{D^2};$$

$$\frac{\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{d}_0}=\frac{a_0\;\;b_0\;\;c_0\;\;d_0}{a_{\mathfrak{bc}}\;b_{\mathfrak{cd}}\;c_{\mathfrak{da}}\;d_{\mathfrak{ab}}};$$

$$(\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}):(\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}):(\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}):(\mathfrak{d}_0\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c})=$$
$$\frac{1}{A^2}:\frac{1}{B^2}:\frac{1}{C^2}:\frac{1}{D^2};$$

$$\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{c}_0\cdot\mathfrak{d}_0=\tau^4.\frac{A^2}{a_0}\cdot\frac{B^2}{b_0}\cdot\frac{C^2}{c_0}\cdot\frac{D^2}{d_0};$$

$$\mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{b}_0\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}=\tau^4.\frac{A^2}{a_{\mathfrak{cd}}}\cdot\frac{B^2}{b_{\mathfrak{cd}}}\cdot\frac{C^2}{c_0}\cdot\frac{D^2}{d_0};$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\qquad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}_0=\tau^4.\frac{A^2}{a_{\mathfrak{bc}}}\cdot\frac{B^2}{b_{\mathfrak{ac}}}\cdot\frac{C^2}{c_{\mathfrak{ab}}}\cdot\frac{D^2}{d_0};$$

$$\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\qquad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots$$

$$\mathfrak{a}_\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}=\tau^4.\frac{A^2}{a_{\mathfrak{bc}}}\cdot\frac{B^2}{b_{\mathfrak{cd}}}\cdot\frac{C^2}{c_{\mathfrak{ad}}}\cdot\frac{D^2}{d_{\mathfrak{ab}}};$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{c}_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}} = \tau^4 \cdot \frac{A^2}{a_{\mathfrak{cd}}} \cdot \frac{B^2}{b_{\mathfrak{ad}}} \cdot \frac{C^2}{c_{\mathfrak{ab}}} \cdot \frac{D^2}{d_{\mathfrak{bc}}};$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{c}_{\mathfrak{d}} \cdot \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}} = \tau^4 \cdot \frac{A^2}{a_{\mathfrak{cd}}} \cdot \frac{B^2}{b_{\mathfrak{cd}}} \cdot \frac{C^2}{c_{\mathfrak{ab}}} \cdot \frac{D^2}{d_{\mathfrak{ab}}};$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{c}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{d}} \cdot \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}} = \tau^4 \cdot \frac{A^2}{a_{\mathfrak{bd}}} \cdot \frac{B^2}{b_{\mathfrak{ac}}} \cdot \frac{C^2}{c_{\mathfrak{bd}}} \cdot \frac{D^2}{d_{\mathfrak{ac}}};$$

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{d}} \cdot \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}} \cdot \mathfrak{b}_{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{c}_{\mathfrak{b}} = \tau^4 \cdot \frac{A^2}{a_{\mathfrak{bc}}} \cdot \frac{B^2}{b_{\mathfrak{ad}}} \cdot \frac{C^2}{c_{\mathfrak{ad}}} \cdot \frac{D^2}{d_{\mathfrak{bc}}}.$$

Alle diese Beziehungen lassen sich in den gewählten Zeichen ebenso leicht übersehen, als sie in Worten schwer ausdrückbar sein würden.

Bevor wir endlich zu der jetzt sehr leichten Berechnung der Halbmesser unserer Berührungskugeln übergehen, haben wir noch geeignete Zeichen auch für diese aufzusuchen und dabei festzuhalten, dass der Werth eines Symbols nicht in dessen Kürze, sondern darin besteht, dass dasselbe auch ohne Figur leicht und sicher erkennen lässt, was es bedeuten soll. Dieses Erforderniss macht sich hier um so mehr geltend, als wir 96 verschiedene Kugeln zu betrachten haben.

Am natürlichsten wird es sein, wenn wir jeden Radius nach dem Mittelpunkte der ihm zugehörigen Kugel bezeichnen. Dieser aber ist nichts anderes, als der Durchschnittspunkt eines Mittelpunktsortes der ersten mit einem Mittelpunktsorte der zweiten Gattung. Wir werden also, wie auch sonst geschieht, durch blosses Nebeneinanderstellen der Symbole für zwei einander schneidende Mittelpunktsörter deren Durchschnittspunkt bezeichnen, und durch das Einklammern dieser Verbindung ausdrücken, dass das Ganze den zu diesem Durchschnittspunkte gehörenden Radius der Berührungskugel bedeute.

Gehen wir, wie früher, von der zu berührenden Kantenverbindung $a_1\, b_1\, c_1\, a_2$ aus, welche der Fläche $b_1\, c_1\, a_2 = A$ und der Ecke $a_1\, b_1\, c_1 = \mathfrak{d}$ angehört. Alle Mittelpunktsörter für die Fläche A waren mit α bezeichnet; mithin wird, wenn wir die Mittelpunktsörter für die an $\mathfrak{d}$ liegenden Ecken selbst mit $\mathfrak{d}$ bezeichnen, allgemein $\alpha\mathfrak{d}$ den Durchschnittspunkt zweier solcher Geraden und $(\alpha\mathfrak{d})$ den diesem letzteren zugehörigen Kugelradius ausdrücken, was im Ganzen die möglichen Verbindungen

$$(\alpha\mathfrak{b}) , (\alpha\mathfrak{c}) , (\alpha\mathfrak{d})$$
$$(\beta\mathfrak{c}) , (\beta\mathfrak{d}) , (\beta\mathfrak{a})$$
$$(\gamma\mathfrak{d}) , (\gamma\mathfrak{a}) , (\gamma\mathfrak{b})$$
$$(\delta\mathfrak{a}) , (\delta\mathfrak{b}) , (\delta\mathfrak{c})$$

gibt.

In jeder solchen Verbindung, wie $\alpha\mathfrak{d}$, sind jetzt nur noch den einander wirklich schneidenden Ortslinien ihre Zeiger beizufügen, wodurch wir den anfangs geführten Untersuchungen gemäss folgende acht brauchbare Combinationen erhalten:

$$(\alpha_0\,\mathfrak{d}_0) , (\alpha_0\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a})$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bc}}\mathfrak{d}_0) , (\alpha_{\mathfrak{bc}}\mathfrak{d}_\mathfrak{a})$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bd}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{c}) , (\alpha_{\mathfrak{cd}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b}) , (\alpha_{\mathfrak{bd}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b}) , (\alpha_{\mathfrak{cd}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{c}).$$

Hieraus lassen sich alsdann alle übrigen Verbindungen durch blosses Fortschieben der Haupt- sowie der Zeigerbuchstaben hervorbringen.

Sei jetzt z. B. der Halbmesser derjenigen Kugel gesucht, welche die vier Kanten a_1, b_1, c_1, a_2 in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2$ so berührt, dass dieselbe in der Tetraederecke $\mathfrak{d}$ selbst, also in $\mathfrak{d}_0$, liegt und die drei Kanten der Fläche A von innen berührt, so ist $\alpha_0\mathfrak{d}_0$ deren Mittelpunkt $\mathfrak{o}_1$ und deren Radius $= \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1\ tang\ \mathfrak{o}\hat{\mathfrak{d}}\mathfrak{b}_1$. Nun ist für diesen Fall $\mathfrak{o}\mathfrak{b}_1 = a_{\mathfrak{bc}}$ und $tang\ \mathfrak{o}\hat{\mathfrak{d}}\mathfrak{b}_1 = \tau \,.\, \sqrt{a_{\mathfrak{bd}}\,a_{\mathfrak{cd}}\,b_{\mathfrak{ad}}\,b_{\mathfrak{cd}}\,c_{\mathfrak{ad}}\,c_{\mathfrak{bd}}} = \tau\,.\,\mathfrak{d}_0$. Wir erhalten demnach

$$(\alpha_0\,\mathfrak{d}_0) = \tau\,.\,a_{\mathfrak{bc}}\,.\,\mathfrak{d}_0.$$

Soll die Kugel in der Tetraederecke $\mathfrak{d}_0$ verbleiben, aber für die Ebene A die Kante $a_2 = \mathfrak{bc}$ von aussen, zusammen in den Punkten $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{a}_2$ berühren, so ist $(\alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_0) = \mathfrak{o}\mathfrak{b}_1\ .\ tang\ \mathfrak{o}\hat{\mathfrak{d}}\mathfrak{b}_1$, aber jetzt $\mathfrak{o}\mathfrak{b}_1 = a_0$, also

$$(\alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_0) = \tau\,.\,a_0\,.\,\mathfrak{d}_0.$$

Hat die Kugel alle Kanten der Fläche A von innen, aber die Rückverlängerung der Kante $\mathfrak{da}$ zu berühren, so muss die Kugel in die Ecke $\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ zu liegen kommen. Demnach ist

$$(\alpha_0\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a}) = \tau\,.\,a_{\mathfrak{bc}}\,.\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a}.$$

Wenn die Kugel die Kante $a_2 = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ der Fläche A von aussen und von den durch $\mathfrak{d}$ gehenden Kanten die $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ in der Rückverlängerung berühren soll, so wird

$$(\alpha_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}) = \tau \,.\, a_0 \,.\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}.$$

Es bleiben jetzt noch die vier Kugeln zu betrachten, deren Mittelpunkte in den Örtern $\alpha_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}$ und $\alpha_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}$ liegen.

Es berühre die Kugel von der Fläche A die Kante $b_1 = \mathfrak{d}\mathfrak{b}$ von aussen in $\mathfrak{b}_1$, und von den durch $\mathfrak{d}$ gehenden Kanten die $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ in ihrer Rückverlängerung, so ist hier $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 = a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}$ und die Kugel fällt in die Ecke $\mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}$. Daher ist

$$(\alpha_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}) = \tau \,.\, a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} \,.\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}.$$

Auf dieselbe Weise wird der Halbmesser derjenigen Kugel gefunden, welche von der Fläche A die Kante $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ von aussen, und von den durch $\mathfrak{d}$ gehenden Kanten die $\mathfrak{d}\mathfrak{b}$ in ihrer Rückverlängerung berührt, wornach

$$(\alpha_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}) = \tau \,.\, a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} \,.\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}$$

wird.

Endlich gibt es noch eine Kugel, welche von der Fläche A die Kante $\mathfrak{d}\mathfrak{b}$ von aussen und von den durch $\mathfrak{d}$ gehenden Kanten sowohl die $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ als die $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ in ihrer Rückverlängerung berührt. Diese Ecke, in welcher demnach unsere Kugel liegt, ist aber die Scheitelecke von derjenigen, welche die nicht rückwärts verlängerten Kanten $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ und die Rückverlängerung von $\mathfrak{d}\mathfrak{b}$ zu Kanten hat, sie ist also die Scheitelecke von $\mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}$ und hat mit dieser einerlei Mittelpunktsort. Daher erhalten wir

$$(\alpha_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}) = \tau \,.\, a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} \,.\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}.$$

Ebenso findet man den Halbmesser derjenigen Kugel, welche von A die Kante $\mathfrak{d}\mathfrak{c}$ von aussen, und von den durch $\mathfrak{d}$ gehenden Kanten sowohl die $\mathfrak{d}\mathfrak{a}$ als die $\mathfrak{d}\mathfrak{b}$ in ihrer Rückverlängerung berührt, nämlich

$$(\alpha_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}) = \tau \,.\, a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} \,.\, \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}.$$

Hiermit sind sämmtliche Aufgaben erster Classe gelöst, da sich die gefundenen Gleichungen von einem Falle bei der gewählten Bezeichnung leicht und sicher nach und nach auf alle übrigen übertragen lassen.

Denkt man sich das Tetraeder auf die Fläche A gestellt, so liegen

$$\left.\begin{array}{l}\text{die Kugeln } \alpha_0\,\mathfrak{d}_0,\ \alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_0,\ \alpha_{\mathfrak{db}}\,\mathfrak{d}_c,\ \alpha_{\mathfrak{dc}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b} \text{ über}\\ \text{die Kugeln } \alpha_0\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a},\ \alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a},\ \alpha_{\mathfrak{db}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b},\ \alpha_{\mathfrak{dc}}\,\mathfrak{d}_c \text{ unter}\end{array}\right\}\text{ der Ebene } A.$$

In jedem der vier um $\mathfrak{d}$ liegenden Scheiteleckenpaare liegen für dieselbe Tetraederfläche A zwei Berührungskugeln, deren Halbmesser zu den Seitenaggregaten des Dreieckes A in folgender Beziehung stehen, die sich unmittelbar aus der Division der zu der nämlichen Ecke gehörigen Gleichungen ergeben:

$$a_0 \;.\; (\alpha_0\;\mathfrak{d}_0) = a_{\mathfrak{bc}} \,.\, (\alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_0);$$
$$a_0 \;.\; (\alpha_0\;\mathfrak{d}_\mathfrak{a}) = a_{\mathfrak{bc}} \,.\, (\alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a});$$
$$a_{\mathfrak{db}} \,.\, (\alpha_{\mathfrak{db}}\,\mathfrak{d}_c) = a_{\mathfrak{dc}} \,.\, (\alpha_{\mathfrak{dc}}\,\mathfrak{d}_c);$$
$$a_{\mathfrak{db}} \,.\, (\alpha_{\mathfrak{db}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b}) = a_{\mathfrak{dc}} \,.\, (\alpha_{\mathfrak{dc}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b});$$

worin durchgängig die Zeiger von a und von α übereinstimmen.

Die abermalige Verbindung der jetzigen Gleichungspaare gibt uns zwei von allen Coëfficienten unabhängige Gleichungen zwischen vier Kugelradien, nämlich

$$(\alpha_0\;\mathfrak{d}_0) \,.\, (\alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{a}) = (\alpha_0\;\mathfrak{d}_\mathfrak{a}) \,.\, (\alpha_{\mathfrak{bc}}\,\mathfrak{d}_0);$$
$$(\alpha_{\mathfrak{db}}\,\mathfrak{d}_c) \,.\, (\alpha_{\mathfrak{dc}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b}) = (\alpha_{\mathfrak{db}}\,\mathfrak{d}_\mathfrak{b}) \,.\, (\alpha_{\mathfrak{dc}}\;\mathfrak{d}_c).$$

Da es bei derartigen Betrachtungen für den Leser sehr erleichternd ist, wenn ihm das Untersuchungsmaterial vollständig vorliegt, indem sich derselbe dann nicht an die Folgerungen des Verfassers gebunden sieht, und da auch hier noch später ein Theil davon verwendet werden wird, so mag eine Tafel der Werthe sämmtlicher Halbmesser hier Platz finden, indem diese ohnedies wenig Raum in Anspruch nimmt, weil sie sich auf die früher gegebene Tangententafel stützt.

In derselben ist wiederum der beständige Factor τ jedem Halbmesserwerthe beizufügen. Auch sollen darin die Klammern um jedes Halbmessersymbol wegbleiben.

Tafel der Werthe der Kantenberührungs-Halbmesser.

Radius	τ	Radius	τ	Radius	τ	Radius	τ
$\alpha_0\ \mathfrak{d}_0$ $\beta_0\ \mathfrak{d}_0$ $\gamma_0\ \mathfrak{d}_0$	$a_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{d}_0$ $b_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{d}_0$ $c_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{d}_0$	$\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{d}_0$ $\beta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{d}_0$ $\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{d}_0$	$a_0\cdot\mathfrak{d}_0$ $b_0\cdot\mathfrak{d}_0$ $c_0\cdot\mathfrak{d}_0$	$\alpha_0\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $\beta_0\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $\gamma_0\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}$	$a_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $b_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $c_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$	$\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $\beta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}$	$a_0\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $b_0\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $c_0\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$
$\alpha_0\ \mathfrak{c}_0$ $\beta_0\ \mathfrak{c}_0$ $\delta_0\ \mathfrak{c}_0$	$a_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{c}_0$ $b_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{c}_0$ $d_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{c}_0$	$\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{c}_0$ $\beta_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{c}_0$ $\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{c}_0$	$a_0\cdot\mathfrak{c}_0$ $b_0\cdot\mathfrak{c}_0$ $d_0\cdot\mathfrak{c}_0$	$\alpha_0\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $\beta_0\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $\delta_0\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$a_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $b_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $d_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $\beta_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$a_0\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $b_0\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $d_0\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$
$\alpha_0\ \mathfrak{b}_0$ $\gamma_0\ \mathfrak{b}_0$ $\delta_0\ \mathfrak{b}_0$	$a_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{b}_0$ $c_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{b}_0$ $d_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{b}_0$	$\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{b}_0$ $\gamma_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{b}_0$ $\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{b}_0$	$a_0\cdot\mathfrak{b}_0$ $c_0\cdot\mathfrak{b}_0$ $d_0\cdot\mathfrak{b}_0$	$\alpha_0\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $\gamma_0\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $\delta_0\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$a_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $c_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $d_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $\gamma_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$a_0\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $c_0\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $d_0\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$
$\beta_0\ \mathfrak{a}_0$ $\gamma_0\ \mathfrak{a}_0$ $\delta_0\ \mathfrak{a}_0$	$b_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{a}_0$ $c_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{a}_0$ $d_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{a}_0$	$\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_0$ $\gamma_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{a}_0$ $\delta_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{a}_0$	$b_0\cdot\mathfrak{a}_0$ $c_0\cdot\mathfrak{a}_0$ $d_0\cdot\mathfrak{a}_0$	$\beta_0\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $\gamma_0\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $\delta_0\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$b_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $c_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $d_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $\gamma_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $\delta_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$b_0\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $c_0\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $d_0\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$
$\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $\gamma_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}$	$d_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $c_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$	$\delta_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $\gamma_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$	$d_{\mathfrak{ba}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $c_{\mathfrak{ba}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$	$\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $\delta_{\mathfrak{cb}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$	$b_{\mathfrak{ca}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $d_{\mathfrak{ca}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$	$\gamma_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $\beta_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}$	$c_{\mathfrak{da}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $b_{\mathfrak{da}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$
$\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $\beta_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}$	$d_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $b_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$	$\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $\delta_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$	$a_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $d_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$	$\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $\delta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$	$a_{\mathfrak{cb}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $d_{\mathfrak{cb}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$	$\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $\alpha_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}$	$c_{\mathfrak{db}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $a_{\mathfrak{db}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$
$\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}$ $\beta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$c_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$ $b_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}$ $\gamma_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$a_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$ $c_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$\beta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}$ $\alpha_{\mathfrak{cb}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$b_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$ $a_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$\beta_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}$ $\alpha_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}$	$b_{\mathfrak{dc}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$ $a_{\mathfrak{dc}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$
$\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}$	$d_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$ $c_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{b}$	$\delta_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $\gamma_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}$	$d_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$ $c_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{a}$	$\beta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $\delta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}$	$b_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$ $d_{\mathfrak{cb}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{a}$	$\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $\beta_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}$	$c_{\mathfrak{db}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$ $b_{\mathfrak{dc}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{a}$
$\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $\beta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}$	$d_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$ $b_{\mathfrak{ad}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$	$\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $\delta_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}$	$a_{\mathfrak{bd}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$ $d_{\mathfrak{ba}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$	$\alpha_{\mathfrak{cb}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $\delta_{\mathfrak{cb}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}$	$a_{\mathfrak{cd}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$ $d_{\mathfrak{ca}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{b}$	$\gamma_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $\alpha_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}$	$c_{\mathfrak{da}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$ $a_{\mathfrak{dc}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{b}$
$\gamma_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}$ $\beta_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$c_{\mathfrak{ab}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$ $b_{\mathfrak{ac}}\cdot\mathfrak{a}_\mathfrak{d}$	$\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}$ $\gamma_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$a_{\mathfrak{bc}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$ $c_{\mathfrak{ba}}\cdot\mathfrak{b}_\mathfrak{d}$	$\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}$ $\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$b_{\mathfrak{ca}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$ $a_{\mathfrak{cb}}\cdot\mathfrak{c}_\mathfrak{d}$	$\beta_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}$ $\alpha_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}$	$b_{\mathfrak{da}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$ $a_{\mathfrak{db}}\cdot\mathfrak{d}_\mathfrak{c}$

Mit Hilfe dieser Tafel aller Berührungshalbmesser lassen sich nun unter Anwendung der früheren Tangententafel und der daraus abgeleiteten Gleichungen eine grosse Zahl sehr einfacher Eigenschaften jener Halbmesser ableiten, von denen hier blos einige mitgetheilt werden sollen. Wir verzichten auf deren Ableitungsweise, indem diese bei den gegebenen Hilfsmitteln sich sehr leicht übersehen lässt.

$$(\alpha_o\ \mathfrak{d}_o) : (\beta_o\ \mathfrak{d}_o) : (\gamma_o\ \mathfrak{d}_o) = a_{\mathfrak{bc}} : b_{\mathfrak{ac}} : c_{\mathfrak{ab}}\,;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{d}_o) : (\beta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{d}_o) : (\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{d}_o) = a_o : b_o : c_o\,.$$

Da sich solche Halbmesserverhältnisse aus der Tafel auf den ersten Blick ableiten lassen, so kann deren weitere Verfolgung unterbleiben.

Wir gehen daher sogleich zur Vergleichung von Halbmesserrechtecken über, und benützen hierzu die aus der Tangententafel gezogenen Folgerungen.

Es ist $\dfrac{(\beta_0\ \mathfrak{a}_0)\cdot(\alpha_0\ \mathfrak{b}_0)}{(\delta_0\ \mathfrak{c}_0)\cdot(\gamma_0\ \mathfrak{d}_0)} = \dfrac{b_{\mathfrak{cd}} \cdot a_{\mathfrak{cd}}}{d_{\mathfrak{ab}} \cdot c_{\mathfrak{ab}}} \cdot \dfrac{\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0}{\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{d}_0} = \dfrac{b_{\mathfrak{cd}} \cdot a_{\mathfrak{cd}}}{d_{\mathfrak{ab}} \cdot c_{\mathfrak{ab}}} \cdot \dfrac{c_{\mathfrak{ab}} \cdot d_{\mathfrak{ab}}}{a_{\mathfrak{cd}} \cdot b_{\mathfrak{cd}}} = 1$, also

$$\begin{array}{ccccccc}
(\beta_0\ \mathfrak{a}_0) & \cdot & (\alpha_0\ \mathfrak{b}_0) & = & (\delta_0\ \mathfrak{c}_0) & \cdot & (\gamma_0\ \mathfrak{d}_0)\,; \\
: & & : & & : & & :
\end{array}$$

Diese Gleichung enthält lauter innere Berührungshalbmesser; links enthalten die Symbole blos die Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und rechts blos $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$. Von keiner der vier Kugeln werden die Tetraederkanten $\mathfrak{ab}$ und $\mathfrak{cd}$ berührt.

Ebenso werden die folgenden Gleichungen, und zwar am natürlichsten in der Weise abgeleitet, dass man, um bei dem vorigen Beispiele zu bleiben, von dem bekannten rationalen Werthe $\dfrac{\mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0}{\mathfrak{c}_0 \cdot \mathfrak{d}_0} = \dfrac{c_{\mathfrak{ab}} \cdot d_{\mathfrak{ab}}}{a_{\mathfrak{cd}} \cdot b_{\mathfrak{cd}}}$ ausgeht, und hierzu aus der Halbmessertafel diejenigen Coëfficienten sucht, welche sich gegen die vorliegenden aufheben.

$$\begin{array}{ccccccc}
(\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{a}}) & \cdot & (\gamma_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{b}}) & = & (\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{d}_0) & \cdot & (\gamma_0\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}})\,; \\
: & & : & & : & & : \\
(\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{b}_0) & \cdot & (\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_0) & = & (\gamma_0\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}) & \cdot & (\delta_0\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{d}})\,; \\
: & & : & & : & & : \\
(\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{b}_{\mathfrak{a}}) & \cdot & (\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_{\mathfrak{b}}) & = & (\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{d}_{\mathfrak{c}}) & \cdot & (\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{c}_{\mathfrak{d}})\,; \\
: & & : & & : & & :
\end{array}$$

$$(\gamma_0\ \mathfrak{a}_0) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}) = (\gamma_0\ \mathfrak{b}_0) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b});$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}) = (\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d});$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{(\alpha_0\ \mathfrak{b}_0) . (\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a})}{(\beta_0\ \mathfrak{a}_0) . (\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b})} = \frac{A^2}{B^2}; \; . \; .$$
$$\frac{(\alpha_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}) . (\alpha_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b})}{(\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}) . (\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b})} = \frac{A^2}{D^2}; \; . \; .$$

Die jetzt folgenden Producte aus vier Berührungshalbmessern sind darum besonders merkwürdig, weil sie für ein und dasselbe Tetraeder constant sind.

$$(\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c}) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{cb}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{a}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{cb}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}) \, . \, (\beta_{\mathfrak{dc}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{c}) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{ad}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ba}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{a}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{d}_0) \, . \, (\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{a}_0) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{b}_0) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{c}_0) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{c}_0) \, . \, (\beta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{d}_0) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{a}_0) \, . \, (\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{b}_0) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{b}_0) \, . \, (\beta_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{c}_0) \, . \, (\gamma_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{d}_0) \, . \, (\delta_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{a}_0) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2;$$
$$(\alpha_0\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a}) \, . \, (\delta_0\ \mathfrak{a}_\mathfrak{d}) \, . \, (\beta_0\ \mathfrak{c}_\mathfrak{b}) \, . \, (\gamma_0\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c}) = \tau^4 . A^2 B^2 C^2 D^2.$$

In den neun ersten dieser Gleichungen ist den Buchstaben eine solche Anordnung gegeben worden, dass sich daraus auf den ersten Blick das Fortschreiten derselben von Factor zu Factor bis zu deren Rückkehr in sich selbst erkennen lässt.

Dass sich aus diesen Gleichungen durch Verbindung je zweier reine Relationen zwischen blossen Berührungshalbmessern, wie

$$\frac{(\alpha_{\mathfrak{bc}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{d})}{(\alpha_{\mathfrak{bd}}\ \mathfrak{b}_\mathfrak{c})} \cdot \frac{(\beta_{\mathfrak{cd}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a})}{(\beta_{\mathfrak{ca}}\ \mathfrak{c}_\mathfrak{d})} \cdot \frac{(\gamma_{\mathfrak{da}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{b})}{(\gamma_{\mathfrak{db}}\ \mathfrak{d}_\mathfrak{a})} \cdot \frac{(\delta_{\mathfrak{ab}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{c})}{(\delta_{\mathfrak{ac}}\ \mathfrak{a}_\mathfrak{b})} = 1$$

ergeben, bedarf keiner weiteren Erwähnung.

Diese wenigen Gleichungen mögen genügen, den Reichthum der merkwürdigen Sätze anzudeuten, welche sich aus der obigen Halbmessertafel mit Leichtigkeit ableiten lassen.

Wir gehen daher zur

zweiten Aufgabenclasse

über, worin die zu berührenden Kanten *zwei Paar Gegenkanten* sind.

Seien b_1, b_2, c_1, c_2 zwei solche Paare und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_2$ die Berührungspunkte, so dass diese zunächst sämmtlich auf den unverlängerten Kanten liegen. Setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}\mathfrak{b}_2 &= \mathfrak{a}\mathfrak{c}_2 = a, \\ \mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{b}\mathfrak{c}_2 = b, \\ \mathfrak{c}\mathfrak{b}_2 &= \mathfrak{c}\mathfrak{c}_1 = c, \\ \mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 &= \mathfrak{d}\mathfrak{c}_1 = d, \end{aligned}$$

so ist der Annahme zufolge:

$$\begin{aligned} a + b &= c_2, \\ b + d &= b_1, \\ d + c &= c_1, \\ c + a &= b_2, \end{aligned}$$

also sowohl $\quad a+b+c+d = c_1 + c_2,$

als auch $\quad a+b+c+d = b_1 + b_2.$

Demnach lassen sich die Werthe von a, b, c, d hieraus nicht bestimmen, sondern es zeigt sich,

dass nur, wenn

$$b_1 + b_2 = c_1 + c_2$$

ist, d. h. *wenn die Summen beider Gegenkantenpaare einander gleich sind*, eine Berührungskugel möglich ist.

Ebenso leicht überzeugt man sich, dass, wenn die Berührungspunkte zum Theil in die verlängerten Kanten fallen, die Bedingungsgleichung

$$b_1 - b_2 = c_1 - c_2$$

erscheint.

Die Aufgaben dieser Classe sind daher nicht mehr für beliebige, sondern blos für besondere Arten von Tetraedern lösbar, wesshalb sie bei der gegenwärtigen *allgemeinen* Untersuchung füglich ausgeschlossen bleiben.

Mehr Interesse wird es dagegen gewähren, schliesslich die Beschaffenheit derjenigen Tetraeder zu ermitteln, für welche es Kugeln gibt, die alle sechs Kanten zugleich berühren, und von diesen Kugeln die Halbmesser zu bestimmen.

Diese Aufgabe steht, wie sich sogleich zeigen wird, mit der vorigen in genauem Zusammenhange.

Am natürlichsten gelangen wir zu deren Auflösung, wenn wir hiezu die Gleichungen für die Halbmesser erster Classe benutzen.

Soll eine Kugel alle sechs Tetraederkanten von innen berühren, so muss z. B.

$$(\alpha_0 \mathfrak{d}_0) = (\beta_0 \mathfrak{d}_0) = (\gamma_0 \mathfrak{d}_0)$$

d. i.

$$a_{\mathfrak{bc}} = b_{\mathfrak{ac}} = c_{\mathfrak{ab}}$$

oder $\frac{1}{2}(-a_2 + b_1 + c_1) = \frac{1}{2}(-b_2 + a_1 + c_1) = \frac{1}{2}(-c_2 + a_1 + b_1)$

werden. Hieraus aber folgt augenblicklich:

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2.$$

Damit die sechs Kanten eines Tetraeders von innen berührt werden, muss in diesem die Summe je zweier Gegenkanten beständig sein.

Soll eine solche Kugel in der Ecke $\mathfrak{d}_0$ liegen und die Kanten der Fläche D von aussen berühren, so wird

$$(\alpha_{\mathfrak{bc}} \mathfrak{d}_0) = (\beta_{\mathfrak{ac}} \mathfrak{d}_0) = (\gamma_{\mathfrak{ab}} \mathfrak{d}_0)$$

d. i.

$$a_0 = b_0 = c_0$$

oder $\frac{1}{2}(a_2 + b_1 + c_1) = \frac{1}{2}(b_2 + c_1 + a_1) = \frac{1}{2}(c_2 + a_1 + b_1)$

und man erhält:

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2.$$

Soll die Kugel in der Ecke c_0 liegen, und die Kanten der Fläche C von aussen berühren, so wird

$$(\alpha_{\mathfrak{bd}} \mathfrak{c}_0) = (\beta_{\mathfrak{ad}} \mathfrak{c}_0) = (\delta_{\mathfrak{ab}} \mathfrak{c}_0)$$

d. i.

$$a_0 = b_0 = d_0$$

oder $\frac{1}{2}(a_2 + b_1 + c_1) = \frac{1}{2}(b_2 + c_1 + a_1) = \frac{1}{2}(c_2 + a_2 + b_2)$,

woraus man findet $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = -(c_1 - c_2)$;

für die Ecke $\mathfrak{b}_0$ und die Fläche B ist

$$a_1 - a_2 = -(b_1 - b_2) = c_1 - c_2$$

und für die Ecke $\mathfrak{a}_0$ und die Fläche A ist

$$-(a_1 - a_2) = b_1 - b_2 = c_1 - c_2.$$

Diese Bedingungen werden verständlicher, wenn wir wieder die Kanten vollständig bezeichnen. Dann nämlich erhalten wir

$$\begin{array}{llllll} \text{für } \mathfrak{a}_0 & \text{und } A: & \mathfrak{ab} - \mathfrak{cd} = & \mathfrak{ac} - \mathfrak{bd} = & \mathfrak{ad} - \mathfrak{bc} = & u_{\mathfrak{a}}; \\ \text{„ } \mathfrak{b}_0 & \text{„ } B: & \mathfrak{bc} - \mathfrak{ad} = & \mathfrak{bd} - \mathfrak{ac} = & \mathfrak{ba} - \mathfrak{cd} = & u_{\mathfrak{b}}; \\ \text{„ } \mathfrak{c}_0 & \text{„ } C: & \mathfrak{cd} - \mathfrak{ab} = & \mathfrak{ca} - \mathfrak{bd} = & \mathfrak{cb} - \mathfrak{ad} = & u_{\mathfrak{c}}; \\ \text{„ } \mathfrak{d}_0 & \text{„ } D: & \mathfrak{da} - \mathfrak{bc} = & \mathfrak{db} - \mathfrak{ac} = & \mathfrak{dc} - \mathfrak{ab} = & u_{\mathfrak{d}}. \end{array}$$

Wenn eine Kugel alle Tetraederkanten so berühren soll, dass sie die Kanten einer Ecke von innen und die Kanten ihrer Gegenfläche von aussen streift, so müssen die Unterschiede der von der Ecke ausgehenden Kanten und ihrer Gegenkanten grössen- und zeichengleich sein.

Es bleibt jetzt noch übrig, die Halbmesser dieser Berührungskugeln zu berechnen.

Sei

$$a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = c_1 + c_2 = s,$$

so ist z. B. $(\alpha_0 \mathfrak{d}_0) = \tau \,.\, a_{\mathfrak{bc}} \,.\, \mathfrak{d}_0$

$$= \tau \,.\, a_{\mathfrak{bc}} \sqrt{a_{\mathfrak{db}}\, a_{\mathfrak{dc}}\, b_{\mathfrak{da}}\, b_{\mathfrak{dc}}\, c_{\mathfrak{da}}\, c_{\mathfrak{db}}}\,.$$

Werden in jedem dieser Aggregate die beiden positiven Glieder durch s ausgedrückt, so erhält man nach leichter Reduction:

$$\begin{aligned} a_{\mathfrak{bc}} &= s - d_0; \\ a_{\mathfrak{db}} = b_{\mathfrak{da}} &= s - c_0; \\ a_{\mathfrak{dc}} = c_{\mathfrak{da}} &= s - b_0; \\ b_{\mathfrak{dc}} = c_{\mathfrak{db}} &= s - a_0. \end{aligned}$$

Daher ist der Halbmesser ρ_0 der innern Berührungskugel an alle Kanten des Tetraeders mit constanter Summe der Gegenkanten

$$\rho_0 = \tau \,.\, (s - a_0) \,.\, (s - b_0) \,.\, (s - c_0) \,.\, (s - d_0)$$

und wird demnach gefunden,

indem man von dieser Summe einzeln den halben Umfang jeder Tetraederfläche abzieht und das Product dieser Reste mit $\tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}}$ multiplicirt.

Sei ferner für

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = u_{\mathfrak{d}}$$

der Halbmesser der äussern in der Tetraederecke $\mathfrak{d}_0$ liegenden Berührungskugel an alle Kanten gesucht, und verwenden wir hierzu den Halbmesser

$$\begin{aligned}(\alpha_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\,\mathfrak{d}_0) &= \tau \,.\, a_0 \,.\, \mathfrak{d}_0 \\ &= \tau \,.\, a_0 \,.\, \sqrt{a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}\, a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\, b_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\, b_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}}\, c_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}}}\,.\end{aligned}$$

so erhalten wir, wenn in jedem dieser Aggregate die von dem Scheitel $\mathfrak{d}$ ausgehenden Kanten, hier a_1, b_1, c_1 durch $u_{\mathfrak{d}}$ ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} a_0 &= u_{\mathfrak{d}} + d_0\,; \\ a_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} &= c_{\mathfrak{d}\mathfrak{b}} = d_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\,; \\ a_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} &= b_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} = d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\,; \\ b_{\mathfrak{d}\mathfrak{a}} &= b_{\mathfrak{d}\mathfrak{c}} = d_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\,. \end{aligned}$$

Daher wird überhaupt, je nachdem constant ist:

$$\begin{array}{ll} u_{\mathfrak{d}} & \lambda_{\mathfrak{d}} = \tau \,.\, (d_0 + u_{\mathfrak{d}}) \,.\, d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \,.\, d_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \,.\, d_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}\,; \\ u_{\mathfrak{c}} & \lambda_{\mathfrak{c}} = \tau \,.\, (c_0 + u_{\mathfrak{c}}) \,.\, c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \,.\, c_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} \,.\, c_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}}\,; \\ u_{\mathfrak{b}} & \lambda_{\mathfrak{b}} = \tau \,.\, (b_0 + u_{\mathfrak{b}}) \,.\, b_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}} \,.\, b_{\mathfrak{a}\mathfrak{d}} \,.\, b_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\,; \\ u_{\mathfrak{a}} & \lambda_{\mathfrak{a}} = \tau \,.\, (a_0 + u_{\mathfrak{a}}) \,.\, a_{\mathfrak{b}\mathfrak{c}} \,.\, a_{\mathfrak{b}\mathfrak{d}} \,.\, a_{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\,. \end{array}$$

Geben in einem Tetraeder die von irgend einer Ecke ausgehenden Kanten, wenn diese um ihre Gegenkanten vermindert werden, grössen- und zeichengleiche Unterschiede, so wird der Halbmesser der in dieser Ecke liegenden äussern Berührungskugel auf folgende Weise gefunden: Man subtrahire jede Seite der Gegenfläche von der Summe der beiden übrigen, vermehre den halben Umfang dieser Fläche um jenen constanten Unterschied, multiplicire diese Summe mit dem Producte der Hälfte jener drei Reste, so ist dieses mit $\tau = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\mathfrak{T}}$ multiplicirte Product gleich dem Radius der verlangten Berührungskugel.

Schliesslich mögen diese Sätze noch auf das reguläre Tetraeder angewendet werden. Ist k dessen Kante, so ist $\mathfrak{T} = \frac{1}{12} k^3 \,.\, \sqrt{2}$, folglich

$$\tau = \frac{4\sqrt{2}}{k^3}\,.$$

Darnach erhalten wir

$$\mathfrak{r}_0 = \frac{1}{4} k \,.\, \sqrt{2}\,;$$

und
$$\mathfrak{r}_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{c}} = \mathfrak{r}_{\mathfrak{d}} = \frac{3}{4} k \,.\, \sqrt{2}.$$

Dieses Tetraeder ist das einzige, welches fünf Kugeln hat, die alle Kanten desselben zugleich berühren.

Zufolge der früheren Sätze ist ausserdem im regulären Tetraeder, wenn die Radien der äussern Berührungskugeln mit einem Strich bezeichnet werden, während der innere ohne Zeichen bleibt und wenn man $k = 1$ setzt:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}};\ \rho = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}};\ \rho' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}};\ \mathfrak{r} = \frac{1}{4}\sqrt{2};\ \mathfrak{r}' = \frac{3}{4}\sqrt{2}.$$

Daraus erhält man unter Anderm:

$$\rho : \rho' : r = 1 : 2 : 3.$$

Der äussere Flächenradius ist zweimal und der Eckenradius dreimal so gross, als der innere Flächenradius.

$$\mathfrak{r}' = 3\,\mathfrak{r}$$

Der äussere Kantenradius ist das Dreifache des innern.

$$\rho \,.\, r = \mathfrak{r}^2$$

Das Rechteck aus dem innern Flächen- und dem Eckenradius ist gleich dem Quadrate des innern Kantenradius.

$$\rho \,.\, \mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \,.\, r$$

Das Rechteck aus dem innern Flächen- und dem äussern Kantenradius ist so gross, als das aus dem innern Kanten- und dem Eckenradius.
